**چکیده:**

حضور نویز در دستگاه های اندازه گیری و اغتشاش عملگرها بر کیفیت کنترل سیستم ها اثر دارد. در کنترل خطی مربعی گوسی، فیلتر کالمن با تعیین بهینه بهره تخمین مقدار واریانس خطای تخمین را به حداقل ممکن کاهش می دهد. این قابلیت فیلتر کالمن طراحان کنترلر خطی مربعی گوسی را ترغیب می کند تا از نویزها و اغتشاشات باقی مانده صرف نظر کنند. درنتیجه، آنها متغیرهای حالت تخمین زده شده را به عنوان سیگنالی قطعی درنظر می­گیرند.

اگر ما متغیرهای حالت را به عنوان سیگنال های غیرقطعی در نظر بگیریم، می توانیم واریانس خطا و ورودی را کمینه کنیم. این امر به ما کمک می کند که به خطاهای کنترلی کمتر، کنترل پایدارتر دست یافته و انرژی کمتری برای ورودی مصرف کنیم. مشابه با رئیکرد فیلتر کالمن، ما یک روشی را توسعه می دهیم تا بهترین ضرایب کنترلی را به منظور کمینه کردن واریانس خطای کنترل و ورودی به سیستم، محاسبه کند. ما مدل توسعه داده شده را را با کنترلر مربعی گوسی و کنترل مدل پیش بین از طریق تست های شبیه­سازی در حضور نویز و اغتشاش مقایسه می کنیم. نتایج تست نشان می دهند که کنترلر ابداع شده 50 درصد واریانس خطای کنترلی کمتر، 40 درصد ورودی کنترلی کوچکتر دارد و از LQR و MPC پایدارتر است. درنهایت، زمان محاسبات کنترلر LQR و MPC حداقل 8 برابر بزرگتر از کنترلر ابداع شده است.

**Abstract:**

Measurement noises and disturbances of actuators affect the quality of control. In linear quadratic Gaussian control (LQG), the Kalman Filter minimizes the estimation errors variances. This ability of the Kalman filter persuades the LQG control designers to neglect the remaining noises and disturbances. As a result, they consider the estimated states as deterministic signals in control design and consider their effects in Kalman Filter Design only.

If we consider the estimated states as non-deterministic signals, we can minimize the error and input variances. It helps us achieve lower control errors and lower input energy consumption. Similar to the Kalman filter approach, we develop a method to calculate the best controller gains to minimize the variance of control errors and inputs. We compare the developed controller with LQG and model predictive controllers (MPC) through some simulation tests in the presence of noise and disturbances. The parameters of controllers have tunned so that the settling times and input norms of the different methods become similar. Tests results show that the devised controller has a 50% smaller control error variance, and a 40% lower control input than the LQR and the model predictive controller (MPC); Finally, the computational time of the LQR and MPC is at least eight times bigger than the devised controller.

Introduction:

نویز اندازه گیری و اغتشاشات از مهترین عوامل ایجاد خطا در کنترل سیستم ها هستند. در کنترل بهینه خطی، از ترکیب کنترلر بهینه مربعی خطی (LQR) و تخمین گر خطی مربعی (LQE) که به فیلتر کالمن نیز شهرت دارد، سیستم کنترل و تخمین مربعی خطی گوسی (LQG) توسعه داده شده است. در این راستا مسئله تخمین بهینه حالت بر اساس تئوری جداسازی از مسئله کنترل بهینه جدا می­شود.

2- توسعه کنترلر با معادله بازگشتی رو به جلو

در این نگرش، تخمین گر کالمن شبیه به یک مجموعه سنسور در نظر گرفته می­شود که تمامی متغیرهای حالت را اندازه می­گیرد. لذا کنترلر از مقادیر مهیا شده توسط تخمین گر کالمن به عنوان فیدبک بهره می برد. در معادلات کنترلر تناسبی فرض می شود خروجی مهیا شده (z) که در اختیار است مقدار تخمین زده شده فیلتر کالمن است. لذا داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.1 |  |
| 2.2 |  |
| 2.3 |  |

در رابطه 2.1، نویز فرآیندی و سفید گوسی با ماتریس کوواریانس W است. برای جایگزینی مقدار تخمین با مقدار اصلی و تبدیل فرم فضای حالت به حالت استاندارد، از معادلات فیلتر کالمن و محاسبه خطای ماندگار تخمین به صورت زیر بهره می بریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.4 |  |
| 2.5 |  |

خواص واریانسی نویز حاصل از اندازه­گیری تخمین گر کالمن، را به صورت عمومی زیر درنظر می­گیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.6 |  |
| 2.7 |  |
| 2.8 |  |

جهت مشخص نمودن خواص خطای اندازه گیری فیلتر کالمن در معادلات 2.6 تا 2.8 ، معادلات تخمین گر فیلتر کالمن را در بخش بعد بررسی می­کنیم. حال با فرضیات فوق به تعیین ضرایب کنترلی بهینه می پردازیم.

حال مقدار تابع هزینه را به صورت زیر تعریف می کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.9 |  |

برای تبدیل ضرب های x و u به ماتریس های کوواریانس تابع هزینه را به فرم مجموع المان های قطری کوواریانس بازنویسی می کنیم. بدین منظور از رابطه ی مشهور و قابل اثبات زیر استفاده می­کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.10 |  |

به صورت مشابه می­توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.11 |  |

لذا با جایگذاری 2.10 و 2.11 در رابطه 2.9 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.12 |  |

حال از معادله حالت (2.1) برای بسط تابع هزینه استفاده می­کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.13 |  |

روابط را باز می کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.14 |  |

حال با ترکیب رابطه (2.3) و (2.5) مقدار ورودی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.15 |  |

از رابطه فوق مقدار ورودی را در رابطه (2.12) جایگزین می دهیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.16 |  |

رابطه فوق را توسعه می دهیم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.17 |  |

برای مقدار کوواریانس xk تابع Pk به صورت زیر تعریف می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.18 |  |

با استفاده از روایط (2.6) ، (2.7)، (2.8) و (2.16) و جایگذاری در رابطه (2.15) نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.19 |  |

با صفر قرار دادن مشتق تابع فوق نسبت به Kk مقدار بهره بهینه بدست می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.20 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 2.21 |  |

با مشتق گیری دوباره بررسی می شود که اکسترمم بدست آمده ماکزیمم است یا می نیمم. با مشتق گیری دوباره حاصل می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.22 |  |

از آنجا که عبارت فوق مثبت معین است، مقدار مربوط به کمترین مقدار J است.

مقادیر آماری ، و از در هر مقطع با استفاده از مقادیر مقطع قبلی براساس روابطی که در بخش بعد ارائه خواهند شد، قابل محاسبه خواهند بود.

**محاسبه ماتریس های کوواریانس به کمک روابط بازگشتی**

در این بخش به محاسبه ، و می پردازیم. مقدار واریانس خطای خروجی Mk از معادلات فیلتر کالمن قابل محاسبه است. با در نظر گرفتن ورودی به عنوان تابعی از خروجی z می توان مسئله بهینه سازی کنترل را برای مرحله بعد مشابه با فیلتر کالمن با کمی تغییرات حل نمود.

|  |  |
| --- | --- |
| 2.23 |  |

در فیلتر کالمن مقدار تخمین از رابطه زیر بدست می آید:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.24 |  |

که در آن

|  |  |
| --- | --- |
| 2.25 |  |

نویز سیستم اندازه گیری است و سفید گوسی با ماتریس کوواریانس است. . به صورت مشابه داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.26 |  |

با جایگذاری روابط 2.24، 2.25 و 2.26 در رابطه 2.23 داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.27 |  |

رابطه فوق را می توان به فرم ساده تر زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.28 |  |

در معادله پیش بین فیلتر کالمن [] داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.29 |  |

با جایگذاری رابطه 2.29 و 2.1 (برای لحظه k) در رابطه 2.28 داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.30 |  |

با ساده سازی حاصل می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.31 |  |

مشابه با رابطه به صورت بدیهی می توان نتیجه گرفت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.32 |  |

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه 2.31 نتیجه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.33 |  |

رابطه بازگشتی خطا در معادله فوق جهت محاسبه خواص خطای تخمین می­تواند مورد استفاده قرار گیرد. لذا می توان کواریانس خطای تخمین را که در رابطه 2.8 تعریف شده است، به صورت زیر بدست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.34 |  |

رابطه فوق به صورت زیر ساده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.36 |  |

بر اساس رابطه2.8 به صورت بدیهی می توان نتیجه گرفت

|  |  |
| --- | --- |
| 2.37 |  |
|  |  |

از جایگذاری رابطه فوق در رابطه 2.36 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.38 |  |

حال به محاسبه ماتریس کراس واریانس خطای تخمین و متغیرهای حالت ( رابطه 2.7) می پردازیم.

برای محاسبه رابطه بازگشتی ماتریس کراس واریانس خطا و متغیرهای حالت، از مقدار تخمین استفاده می­کنیم. به علت داشتن مقدار اولیه تخمین، تعیین شرایط اولیه براساس مقادیر تخمین متغیرهای حالت راحت تر است. از جایگذاری رابطه 2.4 در رابطه 2.7 می توان نتیجه گرفت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.39 |  |

با بسط رابطه فوق نتیجه می دهد:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.40 |  |

مقدار کراس واریانس تخمین در خطای تخمین را می نامیم.

|  |  |
| --- | --- |
| 2.41 |  |

با جایگذاری رابطه 2.8 و 2.41 در رابطه 2.40 نتیجه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.42 |  |

با جایگذاری از رابطه 2.33 در 2.41 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.43 |  |

حال بایستی نیز با یک رابطه بازگشتی بیان شود. می توان ثابت نمود بر حسب و به صورت زیر قابل محاسبه است:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.44 |  |

با جایگذاری از رابطه فوق در رابطه 2.43 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.45 |  |

با بسط ترم ها و ساده سازی حاصل می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.46 |  |

|  |  |
| --- | --- |
| 2.47 |  |

کوواریانس متغیرهای حالت به صورت زیر تعریف می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.48 |  |

با جایگذاری رابطه 2.3 در رابطه 2.1 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.49 |  |

حال مقدار از رابطه 2.5 در رابطه 2.49 جایگذاری می کنیم

|  |  |
| --- | --- |
| 2.50 |  |

می توان رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.51 |  |

با جایگذاری از رابطه 2.51 می توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.52 |  |

با بسط ترم ها می توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.53 |  |

مطابق با روابط 2.3 و 2.5 مقدار قابل جایگذاری است:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.54 |  |

**بررسی مسئله LQG و قانون جدایش**

از آنجاییکه روش کالمن بر مبنای کمینه کردن مربعات است، لذا خاصیت تعامد بردار تخمین و خطا در آن صادق است و این یعنی:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.55 |  |

لذا طبق رابطه 2.42 نتیجه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.56 |  |

با جایگذاری در پاسخ کنترل بهینه رابطه 2.21 و توجه به متقارن بودن ماتریس های کوواریانس، نتیجه می دهد:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.57 |  |

که با ساده سازی داریم:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.58 |  |

و این یعنی بهره بهینه کنترل به خواص آماری وابسته نیست و نتیجه با LQR در شرایط بدون حضور نویز فرآیند و اندازه­گیری دقیقا برابر است. این دقیقا همان قانون جدایش(separation) است که بر اساس ویژگی تعامد تخمین های مبتنی بر حداقل سازی میانگین مربعات (least Square) بیان می کند که دو مسئله تعیین بهره تخمین گر متغیرهای حالت و تعیین بهره بهینه کنترل مربعی خطی در مسئله LQG به صورت مجزا حل می شوند.

لذا در شرایطی که تعامد برقرار است نیازی به ترم ریکاتی رو به جلو برای بدست آوری بهره بهینه نیست و تنها ریکاتی رو به عقب مسئله LQR کافی است.

اما در طراحی واقعی عدم دقت های مختلفی وجود دارد که باعث ایجاد خطا در خاصیت تعامد می شود.